SO EINFACH UND PRAXISNAHE KÖNNEN STATISTISCHE TESTS SEIN !

Monika Weiss, TGM Wien[1]

1. Normalverteilung

1.1 Verteilungen von Stichprobenkenngrößen

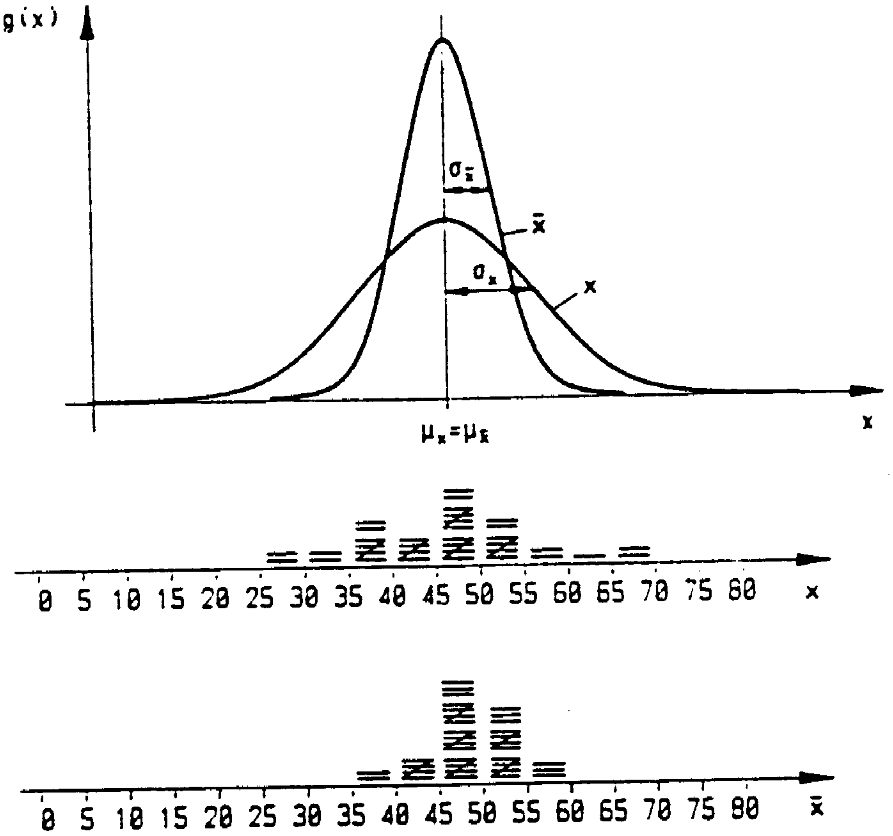
Problemstellung

Wir betrachten eine normalverteilte Produktion mit bekannten Parametern Mittelwert μ und Standardabweichung σ.
Dieser Produktion werden viele Stichproben jeweils vom Umfang n entnommen.
Von jeder Stichprobe wird eine Stichprobenkenngröße bestimmt (z. B. $\bar{x}$, $\tilde{x}$, s^2, s, R und $\hat{p}$).
Diese Stichprobenkenngrößen hängen von der Stichprobe und damit vom Zufall ab.
Wir können daher die Stichprobenkenngrößen als Zufallsvariablen auffassen, die bestimmten Verteilungen gehorchen.
Die Verteilung der Merkmalswerte und das Spiel des Zufalls können wir mit Hilfe der Spielmarkenschachtel studieren.
Die Spielmarkenschachtel enthält eine große Anzahl von Spielmarken, auf jeder Spielmarke ist ein „Meßwert" markiert. Die Spielmarken repräsentieren somit eine bekannte Meßwertverteilung. Die Häufigkeiten der einzelnen „Meßwerte" sind so gewählt, daß die „Meßwerte" normalverteilt sind.
Aus dieser Normalverteilung können wir viele Stichproben entnehmen.
Wir ziehen 40 Stichproben, jeweils vom Umfang $n = 5$, und bestimmen deren Kenngrößen $\bar{x}$, s^2 und s.

Verteilung der Mittelwerte $\bar{x}$

Aus dem Modellversuch mit der Spielmarkenschachtel sehen Sie, daß die Mittelwerte um den gleichen Wert wie die Meßwerte streuen, aber wesentlich weniger.

Wir berechnen von den Meßwerten des Spielmarkenversuchs und von den 40 Mittelwerten $\bar{x}$ den Mittelwert und die Standardabweichung aus Stichproben vom Umfang $n = 5$.



Wir erhalten:

	Mittelwert	Standardabweichung
x	46,58	9,229
x	48,47	4,823

Wir erkennen:

Die Mittelwerte von x und von $\bar{x}$ sind ungefähr gleich groß.
Die Standardabweichung der Mittelwerte $\bar{x}$ ist ungefähr halb so groß wie die der Meßwerte x.

Allgemein gilt:

Wenn die Meßwerte x normalverteilt sind mit $\mu_x = \mu$ und $\sigma_x = \sigma$, so sind die Mittelwerte $\bar{x}$ von Stichproben des Umfangs n normalverteilt mit $\mu_{\bar{x}} = \mu_x = \mu$ und $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Beachten Sie:

1. Bei der Mittelwertbildung $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$ werden im allgemeinen ein paar „zu kleine“ und ein paar „zu große“ Werte addiert. Die Abweichungen heben einander daher teilweise auf.

2. Die Mittelwerte $\bar{x}$ streuen weniger als die Meßwerte x.
   Das heißt, die Mittelwerte $\bar{x}$ hängen mehr von der Produktion und weniger vom Zufall ab.
   Darum begnügt man sich in der Praxis fast nie mit einem einzelnen Meßwert, sondern bestimmt den Mittelwert von n Messungen.
3. Wenn der Stichprobenumfang n vervierfacht wird, so wird $\sigma_{\bar{x}}$ halb so groß wie σ_x.

BEISPIEL

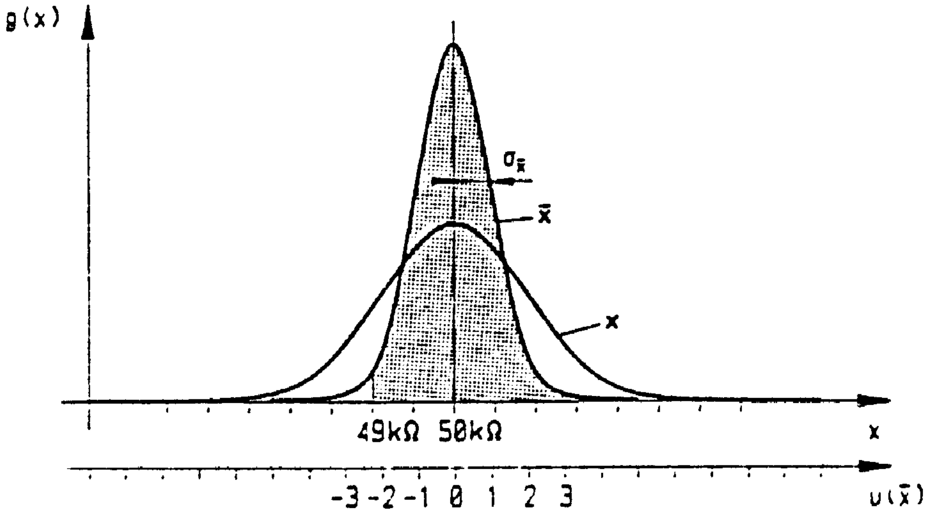
1. Eine normalverteilte Fertigung von Widerständen mit dem mittleren Widerstand von 50 kΩ und der Standardabweichung von 1 kΩ soll geprüft werden. Dazu werden 5 Widerstände gemessen. Zwischen dem Lieferanten und dem Abnehmer ist vereinbart, daß die Lieferung angenommen werden kann, wenn der Mittelwert $\bar{x}$ der 5 Widerstände größer als 49 kΩ ist.
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß diese Lieferung angenommen werden kann?

   Lösung:

   $\mu = 50\,\text{k}\Omega;\ \sigma = 1\,\text{k}\Omega;\ n = 5.$

   $P(\bar{x} > 49\,\text{k}\Omega) = 1 - G(\bar{x} = 49\,\text{k}\Omega).$

   $\bar{x}$ gehorcht einer Normalverteilung mit $\mu_{\bar{x}} = 50\,\text{k}\Omega$ und $\sigma_{\bar{x}} = \frac{1\,\text{k}\Omega}{\sqrt{5}}$.



$\bar{x}_{\text{un}} = 49\,\text{k}\Omega$ entspricht daher $u_{\text{un}} = \frac{\bar{x}_{\text{un}} - \mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{49\,\text{k}\Omega - 50\,\text{k}\Omega}{1/\sqrt{5}\,\text{k}\Omega} = -2{,}24$

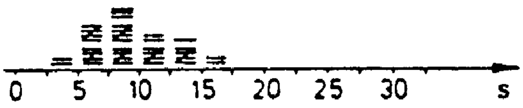
Daher erhalten wir:

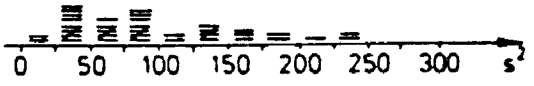
$$P(\bar{x} > 49\,\text{k}\Omega) = 1 - G(u = -2{,}24) = 1 - (1 - G(u = 2{,}24))$$
$$= G(u = 2{,}24) = 0{,}98746$$

Die Lieferung wird mit fast 99%iger Wahrscheinlichkeit angenommen.

Verteilungen der Varianz s^2 und der Standardabweichung s

Aus dem Modellversuch mit der Spielmarkenschachtel sehen wir, daß weder die Werte der Varianz s^2 noch die Werte der Standardabweichung s symmetrisch verteilt sind. Daher sind sie sicher nicht normalverteilt.





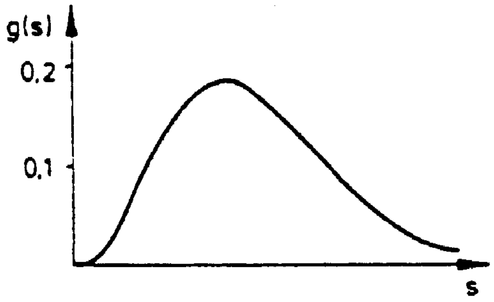
Wir merken uns:

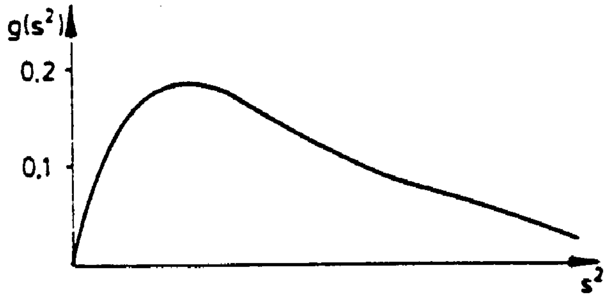
Wenn wir aus einer Stichprobe vom Umfang n die Varianz s^2 bestimmen und daraus die

$$\text{Prüfgröße } \chi^2 = (n-1)\cdot\frac{s^2}{\sigma^2}$$

berechnen, so gehorcht diese Prüfgröße einer χ^2-Verteilung mit $f = n - 1$ Freiheitsgraden. ...[1]

Die χ^2-Verteilung ist eine asymmetrische (linkssteile) Verteilung.





1.2 Zentraler Grenzwertsatz

Im Abschnitt 2.1 haben wir stets vorausgesetzt, daß die Meßwerte normalverteilt sind.

Wir haben festgestellt, daß die Mittelwerte $\bar{x}$ weniger streuen als die Meßwerte x.

Ein weiterer Vorteil der Mittelwerte $\bar{x}$ liegt darin, daß sie auch dann (näherungsweise) normalverteilt sind, wenn die Meßwerte nicht normalverteilt sind.

Der zentrale Grenzwertsatz der Statistik besagt, daß die Mittelwerte $\bar{x}$ aus einer hinreichend großen Stichprobe von beliebig verteilten Werten x normalverteilt sind.

Dabei gilt wieder:

$$\mu_{\bar{x}} = \mu_x$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

---

[1] χ^2 wird gesprochen „Chi-quadrat".

Die Näherung durch die Normalverteilung ist um so besser, je größer der Stichprobenumfang n ist und je ähnlicher die Verteilung der Meßwerte der Normalverteilung ist.

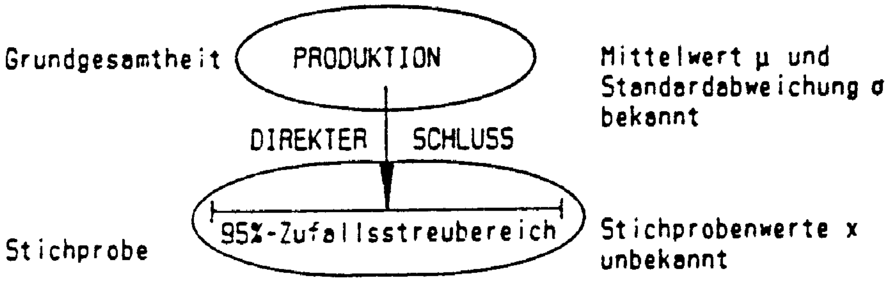
Für die Praxis gilt:

> Unabhängig von der Verteilung der Meßwerte sind Mittelwerte aus Stichproben vom Umfang $n \gtrsim 5$ normalverteilt.

1.3 Zufallsstreubereiche normalverteilter Meßwerte x

Problemstellung

Von einer Produktion sind der Mittelwert μ und die Standardabweichung σ der Meßwerte bekannt.
Dieser Produktion wird eine Stichprobe vom Umfang n entnommen.
Aufgrund der zufälligen Entnahme lassen sich die Stichprobenergebnisse x nicht vorhersagen.
Wir können zunächst nur sagen, daß die Stichprobenergebnisse x streuen.



Sinnvoll ist die Fragestellung:

> In welchem Bereich werden aufgrund der **zufälligen Streuung** z. B. 95% der x-Werte liegen?

Dieser Bereich heißt **95%-Zufallsstreubereich.**

5% der x-Werte liegen außerhalb des 95%-Zufallsstreubereichs.

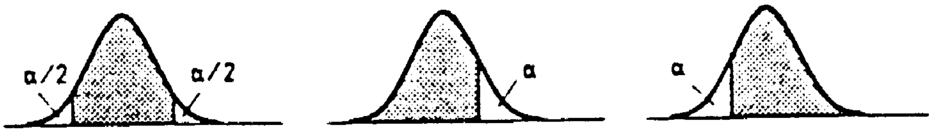
Wir sagen: Das **Irrtumsniveau** α beträgt 5%.
Üblich sind $\alpha = 5\%$ und $\alpha = 1\%$.

> Im $(1-\alpha)$-Zufallsstreubereich für x wird ein Anteil $(1-\alpha)$ der Meßwerte x liegen.

Oder anders ausgedrückt:

Im $(1-\alpha)$-Zufallsstreubereich für x liegt jeder Meßwert x mit einer Wahrscheinlichkeit $P = 1 - \alpha$.

Zufallsstreckenbereiche können auf verschiedene Arten abgegrenzt werden:



zweiseitig abgegrenzter	einseitig nach oben abgegrenzter	einseitig nach unten abgegrenzter

(1 – α)-Zufallsstreubereich

Zweiseitig abgegrenzte Zufallsstreckenbereiche
Am oberen und am unteren Ende wird je ein Zipfel abgeschnitten, dessen Anteil $\alpha/2$ beträgt.

Einseitig nach oben abgegrenzte Zufallsstreubereiche
Am oberen Ende wird ein Zipfel mit dem Anteil α abgeschnitten.

Einseitig nach unten abgegrenzte Zufallsstreubereiche
Am unteren Ende wird ein Zipfel mit dem Anteil α abgeschnitten.

Zweiseitig abgegrenzte Zufallsstreubereiche

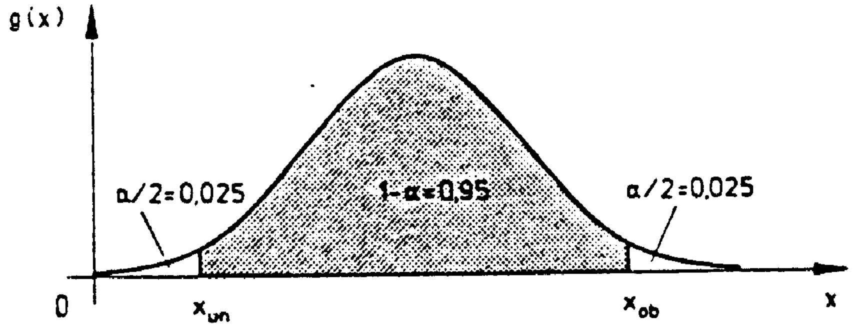
Anhand eines Beispiels lernen wir die Bestimmung der Grenzen eines zweiseitig abgegrenzten (1-α)-Zufallsstreubereiches.

EINFÜHRENDES BEISPIEL

Wir betrachten eine Produktion von Bolzen. Die Längen sind normalverteilt mit einem Mittelwert $\mu = 100$ mm und einer Standardabweichung $\sigma = 0{,}3$ mm.
In welchem Bereich liegen 95% der Meßwerte?

Lösung:

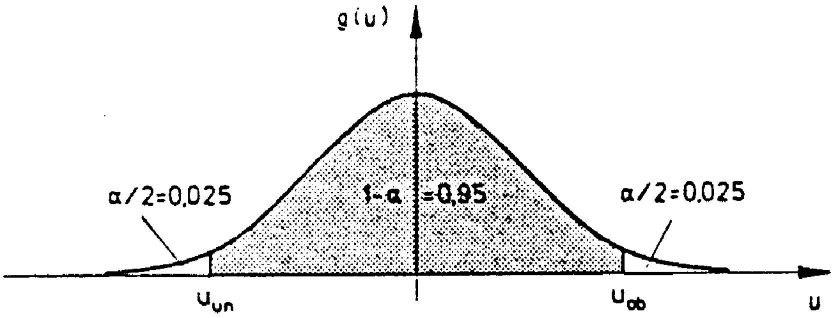
Wegen der zweiseitigen Fragestellung berechnen wir den **zweiseitig abgegrenzten 95%-Zufallsstreubereich.**



Beachten Sie:

Meßwerte sind stetig verteilt. Daher können wir unten und oben jeweils einen Zipfel von genau $\alpha/2$ abschneiden.

Wir können alle Normalverteilungen $N(\mu, \sigma^2)$ auf die Standardnormalverteilung $N(0, 1)$ zurückführen. Wir bestimmen daher zunächst für diese spezielle Normalverteilung den 95%-Zufallsstreubereich.



Es gilt: $G(u_{un}) = \alpha/2 = 0{,}025$ und

$G(u_{ob}) = 1 - \alpha/2 = 0{,}975$

Wegen der Symmetrie der Glockenkurve gilt: $u_{un} = -u_{ob}$

Folglich gilt für alle u, die im zweiseitig abgegrenzten $(1-\alpha)$-Zufallsstreubereich liegen:

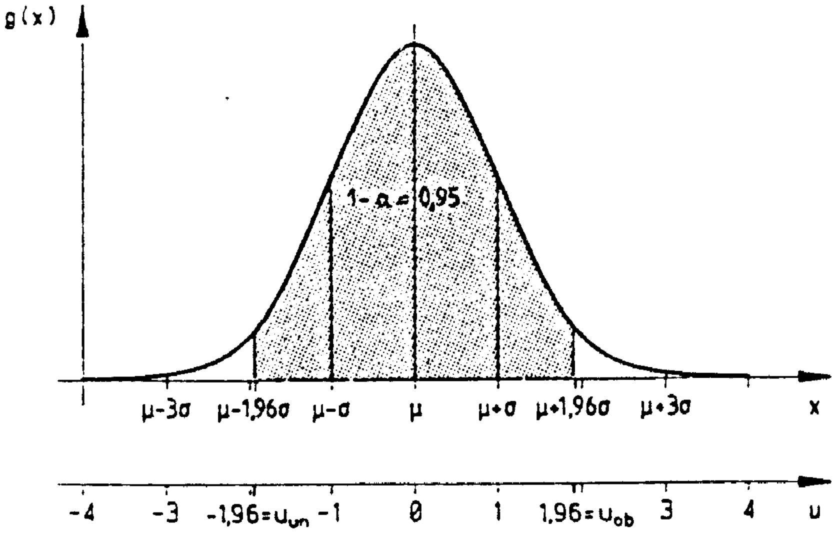
$$-u_{1-\alpha/2} \leqq u \leqq u_{1-\alpha/2}$$

In der Tabelle auf Seite 42 der „Funktionen- und Zahlentafeln" können wir die Schwellenwerte $u_{1-\alpha/2}$ in Abhängigkeit von $1-\alpha/2$ ablesen.

$1-\alpha$		$u_{1-\alpha/2}$
0,95	⇒	1,960

<u>95% der u-Werte liegen also im Bereich $-1{,}96 \leqq u \leqq 1{,}96$</u>

Aus dem Zufallsstreubereich für u können wir nun den Zufallsstreubereich für x bestimmen.



Aus der Zeichnung erkennen wir: $x_{\text{un}} = \mu - 1{,}96\,\sigma$ und $x_{\text{ob}} = \mu + 1{,}96\,\sigma$

Wir erhalten:

$\underline{95\%\ \text{der Meßwerte } x \text{ liegen im Bereich } \mu - 1{,}96\,\sigma \leqq x \leqq \mu + 1{,}96\,\sigma}$

95% der Meßwerte x (Bolzenlänge) liegen im Bereich
$100 - 1{,}96 \cdot 0{,}3 \leqq x \leqq 100 + 1{,}96 \cdot 0{,}3$ $\underline{99{,}41\text{ mm} \leqq x \leqq 100{,}59\text{ mm}}$

Allgemein gilt die Formel:

$$\boxed{\mu - u_{1-\alpha/2} \cdot \sigma \leqq x \leqq \mu + u_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}$$

Interpretation der Formel:

1. Die x-Werte streuen um μ.
2. Die x-Werte streuen um so mehr, je größer σ ist.

BEISPIEL

1. Wir betrachten nochmals die Bolzenfertigung aus dem einführenden Beispiel ($\mu = 100$ mm; $\sigma = 0{,}3$ mm).
In welchem Bereich liegen a) 90% b) 99% c) 99,9% der Meßwerte?

Lösung:

Wegen der zweiseitigen Fragestellung berechnen wir zweiseitig begrenzte Zufallsstreubereiche.

In unserer Tabelle lesen wir $u_{1-\alpha/2}$ ab:

$1-\alpha$	$u_{1-\alpha/2}$
a) 0,90	1,645
b) 0,99	2,576
c) 0,999	3,291

a) $x_{\text{ob}} = 100 + 1{,}645 \cdot 0{,}3 = 100{,}49$
$x_{\text{un}} = 100 - 1{,}645 \cdot 0{,}3 = 99{,}51$ $\underline{99{,}51\text{ mm} \leqq x \leqq 100{,}49\text{ mm}}$

b) $x_{\text{ob}} = 100 + 2{,}576 \cdot 0{,}3 = 100{,}77$
$x_{\text{un}} = 100 - 2{,}576 \cdot 0{,}3 = 99{,}23$ $\underline{99{,}23\text{ mm} \leqq x \leqq 100{,}77\text{ mm}}$

c) $x_{\text{ob}} = 100 + 3{,}291 \cdot 0{,}3 = 100{,}99$
$x_{\text{un}} = 100 - 3{,}291 \cdot 0{,}3 = 99{,}01$ $\underline{99{,}01\text{ mm} \leqq x \leqq 100{,}99\text{ mm}}$

Einseitig abgegrenzte Zufallsstreubereiche

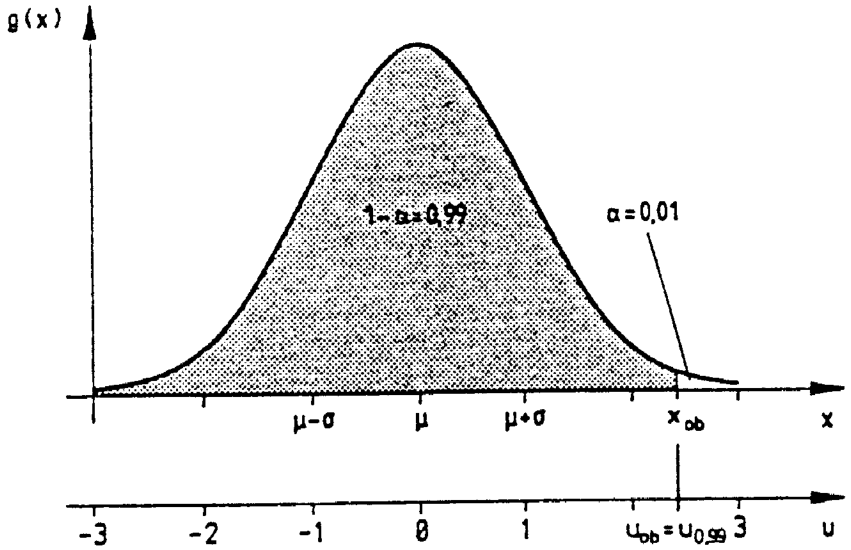
BEISPIELE

2. Der mittlere Achsendurchmesser beträgt 30,0 mm, die Standardabweichung ist 0,05 mm.
Wie groß sind 99% der Achsendurchmesser höchstens?

Lösung:

$\mu = 30{,}000$ mm; $\sigma = 0{,}05$ mm; $\alpha = 0{,}99$

Wegen der **einseitigen Fragestellung** („höchstens") berechnen wir den **einseitig nach oben abgegrenzten 99%-Zufallsstreubereich.**



Aus der Zeichnung ersehen wir, daß $x_{ob} = \mu + u_{0,99} \cdot \sigma$ ist.

Unserer Tabelle entnehmen wir: $1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow u_{1-\alpha} = 2{,}326$

Wir setzen in obige Formel ein und erhalten:

$x_{ob,eins} = 30{,}000 + 2{,}326 \cdot 0{,}05 = 30{,}116$

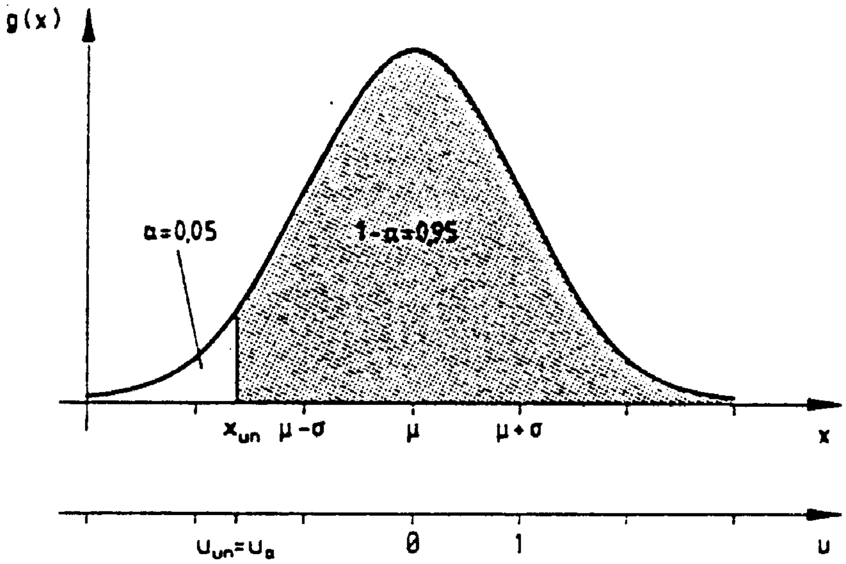
Der einseitig nach oben abgegrenzte 99%-Zufallsstreubereich lautet: $\underline{x \leqq 30{,}12 \text{ mm}}$

3. Der mittlere Durchmesser der Bohrungen beträgt 6,100 mm, die Standardabweichung ist 0,03 mm.
Wie groß sind 95% der Bohrungen mindestens?

Lösung:

$\mu = 6{,}100$ mm; $\sigma = 0{,}03$ mm; $\alpha = 0{,}05$

Wegen der **einseitigen Fragestellung** („mindestens") bestimmen wir den **einseitig nach unten abgegrenzten 95%-Zufallsstreubereich.**



Wegen der Symmetrie der Glockenkurve gilt: $u_{un} = u_{0,05} = -u_{0,95}$.

Wir erhalten: $x_{un,eins} = \mu - u_{0,95} \cdot \sigma$.

Unserer Tabelle entnehmen wir: $u_{0,95} = 1,645$

Somit:

$x_{un,eins} = 6,100 - 1,645 \cdot 0,03 = 6,051$

Der einseitig nach unten abgegrenzte 95%-Zufallsstreubereich lautet:

$\underline{x \geqq 6,051 \text{ mm}}$

Allgemein gilt:

Einseitig nach oben abgegrenzter (1 – α)-Zufallsstreubereich:

$x \leqq x_{ob,eins}$ $\qquad x_{ob,eins} = \mu + u_{1-\alpha} \cdot \sigma$

Einseitig nach unten abgegrenzter (1 – α)-Zufallsstreubereich:

$x \geqq x_{un,eins}$ $\qquad x_{un,eins} = \mu - u_{1-\alpha} \cdot \sigma$

1.4 Zufallsstreubereiche für Mittelwerte $\bar{x}$

Im Abschnitt 2.1 haben wir gesehen:

> Wenn wir aus einer normalverteilten Grundgesamtheit mit dem Mittelwert μ und der Standardabweichung σ Stichproben des Umfangs n ziehen, dann sind die aus den Stichprobenwerten x berechneten Mittelwerte $\bar{x}$ auch normalverteilt, und zwar mit
>
> dem Mittelwert $\mu_{\bar{x}} = \mu$
>
> der Standardabweichung $\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n}$

Jedem dieser Werte x der Stichproben entspricht daher eine standardisierte Größe

$$u_{\bar{x}} = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}$$

Wir gewinnen die Formeln für den

(1 − α)-Zufallsstreubereich für den Mittelwert $\bar{x}$

indem wir in den Formeln für den Zufallsstreubereich für die Meßwerte x die Standardabweichung σ durch $\sigma/\sqrt{n}$ ersetzen.

z. B.: $\mu - u_{1-\alpha/2} \cdot \sigma \leqq x \leqq \mu + u_{1-\alpha/2} \cdot \sigma$

$\mu - u_{1-\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n} \leqq \bar{x} \leqq \mu + u_{1-\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}$

Zusammenfassung:

(1 − α)-Zufallsstreubereiche für Mittelwerte $\bar{x}$

zweiseitig abgegrenzt: $\bar{x}_{\text{un}} \leqq \bar{x} \leqq \bar{x}_{\text{ob}}$

$$\bar{x}_{\text{un}} = \mu - u_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{x}_{\text{ob}} = \mu + u_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

einseitig nach oben abgegrenzt: $\bar{x} \leqq \bar{x}_{\text{ob,eins}}$

$$\bar{x}_{\text{ob,eins}} = \mu + u_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

einseitig nach unten abgegrenzt: $\bar{x} \geqq \bar{x}_{\text{un,eins}}$

$$\bar{x}_{\text{un,eins}} = \mu - u_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

BEISPIELE

1. Eine Charge elektrischer Widerstände ist normalverteilt mit $\mu = 100\,\Omega$ und $\sigma = 7\,\Omega$.
Aus dieser Charge wird eine Stichprobe vom Umfang $n = 25$ geprüft.
Wie groß wird $\bar{x}$ höchstens sein, wenn wir eine Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 1\%$ annehmen?

Lösung:

$\mu = 100$; $\sigma = 7$; $n = 25$; $\alpha = 0{,}01$

Wegen der einseitigen Fragestellung („höchstens") berechnen wir den einseitig nach oben abgegrenzten 99%-Zufallsstreubereich.

Es gilt: $\bar{x}_{\text{ob,eins}} = \mu + u_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

In der Tabelle FZT42 lesen wir ab:

$$1 - \alpha = 0{,}99 \quad \Rightarrow \quad u_{1-\alpha} = 2{,}326$$

Wir erhalten:

$\bar{x}_{\text{ob,eins}} = 100 + 2{,}326 \cdot 7/\sqrt{25}$

$\bar{x}_{\text{ob,eins}} = 103{,}3$

Der einseitig nach oben abgegrenzte 99%-Zufallsstreubereich lautet:

$$\underline{\bar{x} \leqq 103{,}3\,\Omega}$$

2. In einer Fertigungsabteilung werden Bolzen hergestellt. Wenn der Drehautomat, mit dem diese Bolzen gefertigt werden, korrekt eingestellt ist, sind die Durchmesser der Bolzen normalverteilt mit dem Mittelwert 10,00 mm und der Standardabweichung 0,1 mm.
Die Standardabweichung bleibt erfahrungsgemäß über lange Zeit konstant.
Der Mittelwert muß aber überwacht werden. Abweichungen können sowohl nach oben als auch nach unten auftreten.
Hiezu werden stündlich Stichproben vom Umfang $n = 10$ entnommen, die Durchmesser gemessen und der Stichprobenmittelwert berechnet.
In welchem Bereich liegen die Stichprobenmittelwerte, wenn der Automat korrekt eingestellt ist, bei einem Irrtumsniveau von 1%?

Lösung:

$\mu = 10{,}00$ mm $\quad \sigma = 0{,}1$ mm $\quad n = 10 \quad \alpha = 0{,}01$

Wegen der zweiseitigen Fragestellung berechnen wir den zweiseitig abgegrenzten Zufallsstreubereich.

Aus der Tabelle FZT42 lesen wir ab:

$$1 - \alpha = 0{,}99 \quad \Rightarrow \quad u_{1-\alpha/2} = 2{,}576$$

Wir erhalten:

$10{,}00 - 2{,}576 \cdot 0{,}1/\sqrt{10} \leqq \bar{x} \leqq 10{,}00 + 2{,}576 \cdot 0{,}1/\sqrt{10}$ also

$$\underline{9{,}91 \text{ mm} \leqq \bar{x} \leqq 10{,}08 \text{ mm}}$$

1.5 Zufallsstreubereiche für die Standardabweichung s

Im Abschnitt 2.1 haben wir gesehen:
Wenn wir aus einer normalverteilten Grundgesamtheit mit dem Mittelwert μ und der Standardabweichung σ Stichproben des Umfangs n ziehen, dann sind die aus den Stichprobenwerten x berechneten Größen s^2 und s nicht symmetrisch verteilt, also sicher nicht normalverteilt.

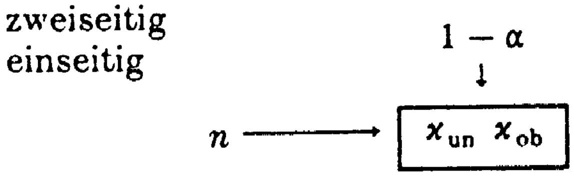
Vielmehr gilt:

Die **Prüfgröße** $\quad \chi^2 = (n-1) \cdot \frac{s^2}{\sigma^2}$
ist χ^2-verteilt mit dem Freiheitsgrad $f = n - 1$. ...[1]

Einfachheitshalber arbeiten wir mit der sogenannten **$\varkappa$-Tabelle** auf der Seite 46 der FZT.

Dort sind die Werte $\varkappa_{un}$ und $\varkappa_{ob}$, die sich aus $\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{n-1;\,1-\alpha/2}}}$ usw. ergeben,

als Funktion von n und $1-\alpha$ (bzw. $1-\alpha/2$) angeführt.



Mit ihrer Hilfe können wir die Zufallsstreubereiche von s und damit auch von s^2 berechnen.

(1 − α)-Zufallsstreubereich für die Standardabweichung s

zweiseitig abgegrenzt[1]: $\quad s_{un} \leqq s \leqq s_{ob}$

$$s_{un} = \frac{\sigma}{\varkappa_{ob}} \qquad s_{ob} = \frac{\sigma}{\varkappa_{un}}$$

einseitig nach oben abgegrenzt[2]: $\quad s \leqq s_{ob,eins}$

$$s_{ob,eins} = \frac{\sigma}{\varkappa_{un,eins}}$$

einseitig nach unten abgegrenzt: $\quad s \geqq s_{un,eins}$

$$s_{un,eins} = \frac{\sigma}{\varkappa_{ob,eins}}$$

---

[1] *Beachten Sie:*
Wenn wir durch den kleineren Wert $\varkappa_{un}$ dividieren, dann erhalten wir den größeren Wert s_{ob}.

BEISPIELE

1. Wir betrachten eine Produktion von Bolzen.
Deren Längen sind normalverteilt mit einer Standardabweichung $\sigma = 0{,}3$ mm.
Dieser Produktion sollen Stichproben, jeweils vom Umfang $n = 13$, entnommen werden.
Die Grenzen des 95%-Zufallsstreubereichs der Standardabweichung s sind zu berechnen.

Lösung:

Zweiseitig abgegrenzter 95%-Zufallsstreubereich von s:

$$\frac{\sigma}{x_{ob}} \leqq s \leqq \frac{\sigma}{x_{un}}$$

Wir entnehmen der Tabelle FZT46 für $(1-\alpha)_{zweiseitig} = 0{,}95$ und $n = 13$ die Werte: $x_{un} = 0{,}72$ und $x_{ob} = 1{,}65$

Wir erhalten: $\frac{0{,}3}{1{,}65} \leqq s \leqq \frac{0{,}3}{0{,}72}$ und damit

$0{,}181 \text{ mm} \leq s \leq 0{,}4167 \text{ mm}$

Der zweiseitig abgegrenzte 95%-Zufallsstreubereich von s lautet:

$$\underline{\underline{0{,}181 \text{ mm} \leqq s \leqq 0{,}417 \text{ mm}}}$$

2. Wir betrachten eine Produktion von Bolzen.
Deren Längen sind normalverteilt mit einer Standardabweichung $\sigma = 0{,}3$ mm.
Dieser Produktion sollen Stichproben, jeweils vom Umfang $n = 13$ entnommen werden.
Wie groß kann bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 1\,\%$ die Standardabweichung dieser Stichproben höchstens werden?

Lösung:

Wegen der einseitigen Fragestellung („höchstens") ermitteln wir den einseitig nach oben abgegrenzten Zufallsstreubereich.

$s \leqq \frac{\sigma}{x_{un,eins}}$ mit $\sigma = 0{,}3$ und $x_{un,eins} = 0{,}68$ (Tabelle FZT46)

Der einseitig nach oben abgegrenzte 99%-Zufallsstreubereich von s lautet: $\underline{\underline{s \leqq 0{,}442 \text{ mm}}}$

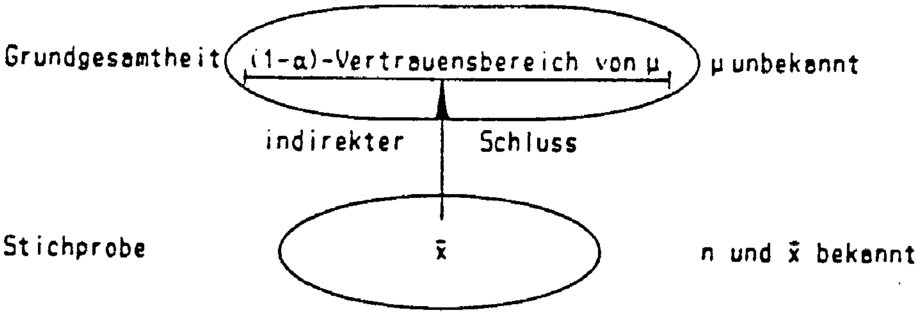
1.6 Vertrauensbereiche für den Mittelwert

Problemstellung

Wir betrachten eine beherrschte Fertigung von Bolzen.
Die Einstellung, der Mittelwert μ des Bolzendurchmessers, soll überwacht werden.
Zur Überwachung ziehen wir Stichproben vom Umfang n und messen die Bolzendurchmesser und berechnen jeweils $\bar{x}$.
Der Mittelwert $\bar{x}$ ist sicher ein mehr oder minder guter, vom Zufall abhängiger Schätzwert für den uns nicht bekannten Mittelwert μ unserer, bezüglich des Bolzendurchmessers normalverteilten Produktion.

Es ist nun sinnvoll nach dem Bereich zu fragen, in dem der Mittelwert μ unserer Produktion mit der Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha$ (α = Irrtumswahrscheinlichkeit) liegt.
Dieser Bereich heißt **$(1 - \alpha)$-Vertrauensbereich des Parameters** μ.

$1 - \alpha$ heißt **Vertrauensniveau.**



Wir unterscheiden:

zweiseitig abgegrenzte Vertrauensbereiche, z. B.: $95 \text{ mm} \leqq \mu \leqq 97 \text{ mm}$;

einseitig nach oben abgegrenzte Vertrauensbereiche, z. B.: $\mu \leqq 1{,}23 \text{ kg}$;

einseitig nach unten abgegrenzte Vertrauensbereiche, z. B.: $\mu \geqq 120\,\Omega$.

Beachten Sie:

Zufallsstreubereich der **Stichprobenkenngröße** x,
Vertrauensbereich des **Grundgesamtheits-Parameters** μ.

Bei der Berechnung der Grenzen der Vertrauensbereiche für μ unterscheiden wir die Fälle

a) σ bekannt,
b) σ unbekannt.

Vertrauensbereiche für den Mittelwert μ bei bekanntem σ

Die Grenzen des zweiseitig abgegrenzten $(1-\alpha)$-Vertrauensbereichs können wir leicht berechnen:

> Die Mittelwerte $\bar{x}$ aus Stichproben vom Umfang n einer $N(\mu, \sigma^2)$-verteilten Grundgesamtheit sind $N(\mu, \sigma^2/n)$-verteilt.

Folglich gilt:

$$P(\mu - u_{1-\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n} \leqq \bar{x} \leqq \mu + u_{1-\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}) = 1 - \alpha$$

Durch Umformen erhalten wir:

$$P(\bar{x} - u_{1-\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n} \leqq \mu \leqq \bar{x} + u_{1-\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}) = 1 - \alpha$$

Der zweiseitig abgegrenzte $(1-\alpha)$-Vertrauensbereich für μ bei bekanntem σ lautet somit:

$$\underline{\bar{x} - u_{1-\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n} \leqq \mu \leqq \bar{x} + u_{1-\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}}$$

Beachten Sie:

Zufallsstreubereich: $\mu - u_{1-\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n} \leqq \bar{x} \leqq \mu + u_{1-\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}$

Vertrauensbereich: $\bar{x} - u_{1-\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n} \leqq \mu \leqq \bar{x} + u_{1-\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}$

Gleicher Aufbau der Formeln mit Vertauschung von $\bar{x}$ und μ.

Entsprechende Überlegungen gelten für die einseitig abgegrenzten Vertrauensbereiche.

Zusammenfassung über Vertrauensbereiche von μ bei bekanntem σ

Zweiseitig abgegrenzt: $\mu_{\text{un}} \leqq \mu \leqq \mu_{\text{ob}}$

$$\mu_{\text{un}} = \bar{x} - u_{1-\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}$$

$$\mu_{\text{ob}} = \bar{x} + u_{1-\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}$$

Einseitig nach oben abgegrenzt: $\mu \leqq \mu_{\text{ob}}$

$$\mu_{\text{ob}} = \bar{x} + u_{1-\alpha} \cdot \sigma/\sqrt{n}$$

Einseitig nach unten abgegrenzt: $\mu \geqq \mu_{\text{un}}$

$$\mu_{\text{un}} = \bar{x} - u_{1-\alpha} \cdot \sigma/\sqrt{n}$$

BEISPIEL

1. Wir betrachten eine beherrschte Fertigung von Bolzen.
Die Durchmesser sind normalverteilt mit $\sigma = 10{,}03$ mm. Zur Überprüfung der Maschine wird eine Stichprobe von 20 Bolzen entnommen mit dem Ergebnis: $n = 20$ $\bar{x} = 10{,}05$ mm $s = 0{,}052$ mm
In welchen Grenzen wird der Durchmesser μ der betrachteten Fertigung liegen, wenn wir das Vertrauensniveau $1 - \alpha = 0{,}95$ wählen?

Lösung:

Wegen der zweiseitigen Fragestellung berechnen wir den zweiseitig abgegrenzten Vertrauensbereich.

$\mu_{\text{un}} = \bar{x} - u_{1-\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}$

$\mu_{\text{ob}} = \bar{x} + u_{1-\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}$ Tabelle FZT, Seite 42

$u_{1-\alpha/2} = 1{,}960$ $u_{1-\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n} = 1{,}96 \cdot 0{,}03/\sqrt{20} = 0{,}013148$

$\mu = 10{,}05 \pm 0{,}0131$

$\underline{10{,}036 \text{ mm} \leq \mu \leq 10{,}064 \text{ mm}}$

Vertrauensbereich für den Mittelwert μ bei unbekanntem σ

Meistens wissen wir von der Produktion nur, daß sie normalverteilt ist. Wir kennen weder ihren Mittelwert μ noch ihre Standardabweichung σ.

Es bleibt uns nur der Ausweg das σ der Grundgesamtheit durch die Standardabweichung s der gezogenen Stichprobe zu schätzen.

Weniger Information bedeutet natürlich, daß der Vertrauensbereich für μ in diesem Fall größer wird als bei bekanntem σ.

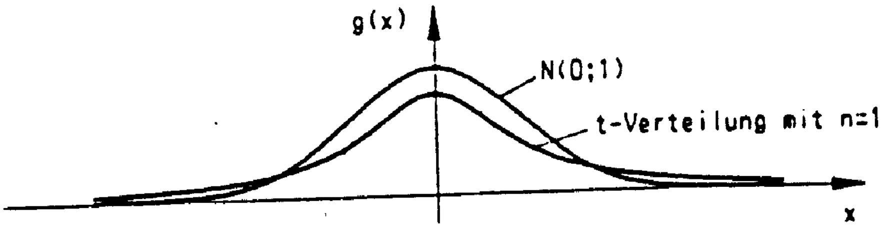
In der Formel $\bar{x} - u_{1-\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{x} + u_{1-\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}$ tritt s anstelle von σ und ein Faktor $t_{n-1;1-\alpha/2}$ anstelle von $u_{1-\alpha/2}$.

Somit:

$$\bar{x} - t_{n-1;1-\alpha/2} \cdot s/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{n-1;1-\alpha/2} \cdot s/\sqrt{n}$$

$t_{n-1;1-\alpha/2}$ ist der $(1 - \alpha/2)$-Schwellenwert der t-Verteilung mit dem Freiheitsgrad $f = n - 1$.

Aus der folgenden Abbildung ist zu ersehen, daß die t-Verteilung ähnlich wie die N(0,1)-Verteilung verläuft.



Der Mittelwert der t-Verteilung beträgt 0, ihre Varianz $\frac{n-1}{n-2}$ ...[1]

f heißt Freiheitsgrad und ist vom Stichprobenumfang abhängig: $f = n - 1$.

Für immer größer werdende n geht die t-Verteilung in die standardisierte Normalverteilung über.

Zusammenfassung:

Zweiseitig abgegrenzt: $\mu_{un} \leqq \mu \leqq \mu_{ob}$

$$\mu_{un} = \bar{x} - t_{n-1;1-\alpha/2} \cdot s/\sqrt{n}$$
$$\mu_{ob} = \bar{x} + t_{n-1;1-\alpha/2} \cdot s/\sqrt{n}$$

Einseitig nach oben abgegrenzt: $\mu \leqq \mu_{ob}$

$$\mu_{ob} = \bar{x} + t_{n-1;1-\alpha/2} \cdot s/\sqrt{n}$$

Einseitig nach unten abgegrenzt: $\mu \geqq \mu_{un}$

$$\mu_{un} = \bar{x} - t_{n-1;1-\alpha/2} \cdot s/\sqrt{n}$$

Beachten Sie:

Wenn wir σ durch s ersetzen, dann müssen wir die Faktoren $u_{1-\alpha/2}, \ldots$ durch die größeren Faktoren $t_{n-1;1-\alpha/2}, \ldots$ ersetzen.

Für $n < \infty$ gilt: $t_{n-1;G} > u_G$

Für $n = \infty$ gilt: $t_{n-1;G} = u_G$

Wenn σ unbekannt ist, haben wir weniger Information über die Grundgesamtheit. Daher ist der Vertrauensbereich bei unbekanntem σ breiter als bei bekanntem σ.

---

[1] Für $n=1$ und $n=2$ hat die t-Verteilung keine Varianz.

BEISPIEL

2. Wir betrachten eine beherrschte Fertigung von Bolzen.
Die Durchmesser sind normalverteilt.
Zur Überprüfung der Maschine wird eine Stichprobe von 20 Bolzen entnommen.

Ergebnis der Prüfung: $n = 20$ $\bar{x} = 10{,}05$ mm $s = 0{,}052$ mm

In welchen Grenzen wird der Durchmesser μ der betrachteten Fertigung liegen, wenn wir das Vertrauensniveau $1 - \alpha = 0{,}95$ wählen?

Lösung:

Zweiseitige Fragestellung, daher zweiseitig abgegrenzter Vertrauensbereich. σ ist nicht bekannt, daher t-Verteilung.

$\mu_{\text{un}} = \bar{x} - t_{n-1;1-\alpha/2} \cdot s/\sqrt{n}$ Tabelle FZT, Seite 48

$\mu_{\text{ob}} = \bar{x} + t_{n-1;1-\alpha/2} \cdot s/\sqrt{n}$ $t_{19;0{,}95\,\text{zweis}} = 2{,}093$

$t_{19;0{,}95\,\text{zweis}} \cdot s/\sqrt{n} = 2{,}093 \cdot 0{,}052/\sqrt{20} = 0{,}024336$

$\mu = 10{,}05 \pm 0{,}024$

$\underline{10{,}026 \text{ mm} \leqq \mu \leqq 10{,}074 \text{ mm}}$

Hinweis:

Vergleichen Sie die Ergebnisse der Beispiele 1 und 2.

1.7 Vertrauensbereich für die Standardabweichung σ

Bekanntlich gilt:

$\chi^2 = (n-1)\dfrac{s^2}{\sigma^2}$ ist χ^2-verteilt mit $f = n - 1$ Freiheitsgraden.

Für den zweiseitig abgegrenzten Zufallsstreubereich muß daher gelten:

$$\chi^2_{n-1;\alpha/2} \leqq (n-1)\frac{s^2}{\sigma^2} \leqq \chi^2_{n-1;1-\alpha/2} \text{ und damit}$$

$$\frac{n-1}{\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}} \cdot s \leqq \quad \sigma^2 \quad \leqq \frac{n-1}{\chi^2_{n-1;\alpha/2}} \cdot s$$

Mit $\varkappa_{un} = \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}}}$ und $\varkappa_{ob} = \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}}}$

erhalten wir $\underline{\varkappa_{un} \cdot s \leqq \sigma \leqq \varkappa_{ob} \cdot s}$

Analoge Überlegungen gelten für die einseitig abgegrenzten Vertrauensbereiche.

Zusammenfassung:

Zweiseitig abgegrenzt: $\sigma_{un} \leqq \sigma \leqq \sigma_{ob}$

$\sigma_{un} = \varkappa_{un} \cdot s \qquad \sigma_{ob} = \varkappa_{ob} \cdot s$

Einseitig nach oben abgegrenzt: $\sigma \leqq \sigma_{ob}$

$\sigma_{ob} = \varkappa_{ob,eins} \cdot s$

Einseitig nach unten abgegrenzt: $\sigma \geqq \sigma_{un}$

$\sigma_{un} = \varkappa_{un,eins} \cdot s$

Die $\varkappa$-Werte entnehmen wir der Tabelle FZT, Seite 46.

Beachten Sie:

χ^2 ist in Abhängigkeit von $f = n - 1$ tabelliert,
$\varkappa$ in Abhängigkeit von n.

BEISPIEL

1. Wir betrachten eine beherrschte Fertigung von Bolzen.
Die Durchmesser sind normalverteilt.
Zur Überprüfung der Maschine wird eine Stichprobe von 20 Bolzen entnommen.
Ergebnis dieser Prüfung: $n = 20 \quad \bar{x} = 10{,}05\ \text{mm} \quad s = 0{,}052\ \text{mm}$

In welchen Grenzen wird die Standardabweichung σ der betrachteten Fertigung liegen, wenn wir das Vertrauensniveau $1 - \alpha = 0{,}95$ wählen?

Lösung:

Wegen der zweiseitigen Fragestellung berechnen wir den zweiseitig abgegrenzten Vertrauensbereich.

95%-Vertrauensbereich zweiseitig: $\varkappa_{un} \cdot s \leqq \sigma \leqq \varkappa_{ob} \cdot s$

Die Werte $\varkappa_{un}$ und $\varkappa_{ob}$ entnehmen wir der Tabelle FZT, Seite 46.

$n = 20;\ s = 0{,}052\ \text{mm}$ $\qquad 0{,}76 \cdot 0{,}052 \leqq \sigma \leqq 1{,}46 \cdot 0{,}052$

$\underline{0{,}0395\ \text{mm} \leqq \sigma \leqq 0{,}0760\ \text{mm}}$

2. Anwendungen der statistischen Methoden in der Qualitätssicherung

2.1 Statistische Tests

Mit Hilfe von Statistischen Tests will man Aussagen über Grundgesamtheiten überprüfen.

Wir unterscheiden Parametertests, Anpassungstests und Ausreißertests.

Bei **Parametertests** sind zwei oder mehr Grundgesamtheiten mit einer bekannten Verteilungsform gegeben.
Es werden Parameter dieser Grundgesamtheiten z. B. Mittelwerte, Standardabweichungen oder Anteile fehlerhafter Einheiten verglichen.

Mit Hilfe von **Anpassungstests** untersucht man, ob eine Grundgesamtheit eine bestimmte Verteilungsform hat, z. B. ob Meßwerte normalverteilt sind oder ob die Anzahl von Fehlern poisson-verteilt ist.

Mit Hilfe der **Ausreißertests** wird untersucht, ob ein einzelner Meßwert zu einer Meßwertreihe „paßt" oder ob er ein Ausreißer ist.

Aus Zeitgründen beschreiben wir im Abschnitt 5.2 nur einen Parametertest.

Am Beginn jedes statistischen Tests wird die zu überprüfende Aussage über die Grundgesamtheit(en) formuliert.

Zum Vergleich: Das entspricht dem Verlesen der Anklageschrift bei einem Gerichtsprozeß. Allerdings wird hier üblicherweise die „Nicht-Anklage" festgehalten.
In der Fachsprache heißt dieser Vorgang:

Aufstellen der Nullhypothese H_0 ...[1]

---

[1] Hypothese = Behauptung

Mögliche Nullhypothesen sind

bei Parametertests:

zweiseitig: H_0: Parameter A = Parameter B (= Parameter C = ...)
oder einseitig: H_0: Parameter $A \leq$ Parameter B
bzw.: H_0: Parameter $B \geq$ Parameter A

z. B.: Die Mittelwerte von zwei normalverteilten Grundgesamtheiten sind gleich.
Die vier Chargen von gleich großen Garnspulen haben die gleiche mittlere Anzahl von Fadenbrüchen je Meter Garn.
Der Anteil fehlerhafter Einheiten in der Grundgesamtheit ist höchstens 3%.
Die Standardabweichung der Meßwerte der von der Maschine A gefertigten Teile ist mindestens so groß wie die Standardabweichung der Meßwerte der von der Maschine B gefertigten Teile.

bei Anpassungstests:

H_0: Die Grundgesamtheit gehorcht einer ...-Verteilung

z. B.: Die Anzahl von Lötfehlern je Platine einer bestimmten Charge ist poisson-verteilt.
Die Durchmesser einer bestimmten Charge von Bolzen sind normalverteilt. Die sechs Augenzahlen beim Werfen eines Würfels sind gleichverteilt.

bei Ausreißertests:

H_0: Der kleinste Meßwert $x_{\min}$ ist kein Ausreißer
bzw. Der größte Meßwert $x_{\max}$ ist kein Ausreißer.

Zur Überprüfung der Gültigkeit dieser Nullhypothesen stehen Informationen über Stichproben zur Verfügung, die allerdings von der Stichprobenentnahme und damit auch vom Zufall abhängen.

Zum Vergleich: Das Urteil im Gerichtsprozeß muß mit Hilfe eines Indizienbeweisverfahrens gefällt werden, es gibt kein Geständnis und keinen unmittelbaren Tatzeugen.

Wir behandeln in diesem Buch nur Parameterhypothesen.

Beachten Sie:

Zu jeder Nullhypothese H_0 gehört eine Gegenhypothese H_1, auch Alternativhypothese genannt.
Die H_1 ist immer die Verneinung der H_0.
Durch H_0 und H_1 wird somit die Gesamtheit aller Werte des betrachteten Parameters eindeutig zerlegt.

Mit Hilfe eines statistischen Tests soll untersucht werden, ob eine Abweichung zwischen Stichprobenergebnissen bzw. eines Stichprobenergebnisses von der entsprechenden Größe der Grundgesamtheit bzw. eines Stichprobenergebnisses von einer zu erwartenden Größe auch zufallsbedingt, d. h. eine Folge der Stichprobenentnahme sein kann.

In diesem Fall wird die **Nullhypothese** durch das Stichprobenresultat **nicht widerlegt.**

Ist die Abweichung jedoch so groß, daß eine derartige Abweichung bei Gültigkeit der Nullhypothese – d. h. aufgrund von ausschließlich zufälligen Schwankungen – nur mit sehr kleiner Wahrscheinlichkeit vorkommt, so ist die Wahrscheinlichkeit sehr groß, daß die Nullhypothese nicht stimmt.

Man betrachtet die **Nullhypothese** dann als **widerlegt.**

Beachten Sie:
Im ersten Fall haben wir nicht gesagt, daß die Nullhypothese bewiesen wurde, sie kann nur nicht widerlegt werden.

Zum Vergleich: Dies entspricht bei Gericht einem Freispruch mangels Beweisen.
In diesem Fall ist nicht die Unschuld eines Angeklagten bewiesen worden; die Beweise reichten aber nicht aus, den Angeklagten schuldig zu sprechen.

Im zweiten Fall besteht die Möglichkeit, daß das Stichprobenergebnis tatsächlich durch das Eintreten einer sehr seltenen, d. h. sehr unwahrscheinlichen Ereignisses bei Gültigkeit der Nullhypothese entstanden ist. Diese Möglichkeit ist aber sehr unwahrscheinlich.

Zum Vergleich: Kein Indizienbeweis bei Gericht kann die Möglichkeit eines Fehlerteils völlig ausschalten.

Weil die Beurteilung der Gültigkeit der Nullhypothese – die eine Aussage über eine oder mehrere Grundgesamtheiten darstellt – auf Stichprobenergebnissen basiert, besteht immer – auch bei völlig korrekter Testdurchführung – die Gefahr eines Fehlurteils.

Wir unterscheiden Fehler 1. Art und Fehler 2. Art.

Fehler 1. Art: Die Nullhypothese wird verworfen, obwohl sie stimmt.

Das heißt die Abweichung des Stichprobenergebnisses bzw. zwischen den Stichprobenergebnissen war tatsächlich eine Folge der Stichprobenentnahme.

Zum Vergleich: Das entspricht dem unschuldig Verurteilten bei Gericht.

Fehler 2. Art:	Die Nullhypothese wird nicht verworfen, obwohl sie nicht stimmt.

Die Abweichung des Stichprobenergebnisses bzw. zwischen den Stichprobenergebnissen war so klein, daß sie auch aufgrund von zufälligen Schwankungen auftritt. Im konkreten Fall lag jedoch auch eine systematische Abweichung, die in der Grundgesamtheit begründet ist, vor. Diese „wahre Abweichung“ war jedoch bei der Stichprobenüberprüfung von den Schwankungen des Zufalls überlagert und daher nicht nachweisbar.

Zum Vergleich: Das entspricht dem Täter, dessen Schuld bei Gericht nicht nachgewiesen werden kann und der daher – irrtümlich – freigesprochen wird.

Zusammenfassung:

	Entscheidung für H_0	Entscheidung gegen H_0 (Entscheidung für H_1)
H_0 ist richtig	*richtige* Entscheidung	Fehler 1. Art
H_1 ist richtig	Fehler 2. Art	*richtige* Entscheidung

Die Irrtumswahrscheinlichkeit α, das ist die größtmögliche Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art, wird am Beginn des Testverfahrens festgelegt.

Je kleiner die Irrtumswahrscheinlichkeit α gewählt wird, desto schwieriger ist es, einen „wahren Unterschied“ nachzuweisen.

Üblich sind die Werte $\alpha = 5\%$ bzw. $\alpha = 1\%$, seltener werden die Werte $\alpha = 0{,}1\%$ bzw. $\alpha = 10\%$ verwendet.

Oft ist es sinnvoll – und daher auch in der Praxis üblich –, parallel mit den drei Werten $\alpha = 5\%$, 1% und $0{,}1\%$ zu rechnen.

In diesem Fall kann das Risiko besonders gut abgeschätzt werden.

Man verbindet die Vorteile großer Aussageschärfe, d. h. einer kleinen Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art, ($\alpha = 5\%$) mit einer großen Sicherheit, d. h. kleiner Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art ($\alpha = 0.1\%$).

Statistische Tests für die Lage von Meßwerten

Wir beschränken uns aus Zeitgründen auf den Vergleich Stichprobe gegen Grundgesamtheit bei bekannter Standardabweichung σ.

Gegeben sind zwei normalverteilte Grundgesamtheiten A und B.

Von A kennen wir σ_A.

> Weil wir μ_A nicht kennen, entnehmen wir A eine Stichprobe vom Umfang n_A und ermitteln $\bar{x}_A$, einen Schätzwert für den unbekannten Parameter μ_A.

Von B kennen wir μ_B.

Wir stellen uns die Frage:

> Besteht ein signifikanter Unterschied zwischen den beiden Mittelwerten μ_A und μ_B?

Wir führen unseren Test schrittweise durch.

1. Schritt: Entscheidung, ob zweiseitige oder einseitige Fragestellung vorliegt.

2. Schritt: Aufstellen der Nullhypothese:
zweiseitige Fragestellung: $\mathbf{H_0}$: $\mu_A = \mu_B$
einseitige Fragestellung: $\mathbf{H_0}$: $\mu_A \leqq \mu_B$ ...[1]
oder: $\mathbf{H_0}$: $\mu_A \geqq \mu_B$

3. Schritt: Wahl der Irrtumswahrscheinlichkeit α

Die Fortsetzung kann mit Hilfe des direkten Schlusses oder mit Hilfe des indirekten Schlusses erfolgen.
Beide Methoden sind prinzipiell gleichwertig und liefern das gleiche Ergebnis. Meistens ist der direkte Schluß einfacher durchzuführen.

Direkter Schluß

4. Schritt: Bestimmung des Zufallsstreubereichs für $\bar{x}_B$

Wir bestimmen den zweiseitig oder einseitig abgegrenzten $(1-\alpha)$-Zufallsstreubereich für $\bar{x}_B$. Wir verwenden dazu die Standardabweichung σ_A (siehe Abschnitt 1.3).

5. Schritt: Vergleich von $\bar{x}_A$ mit dem Zufallsstreubereich für $\bar{x}_B$

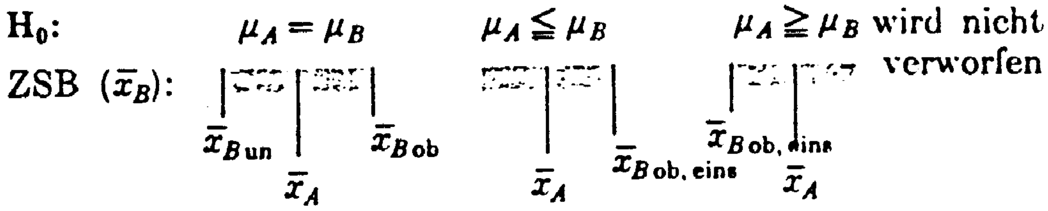
---

[1] Die jeweilige Gegenhypothese $\mathbf{H_1}$ braucht man nicht angeben, weil sie ja alle in $\mathbf{H_0}$ nicht enthaltenen Fälle umfaßt.

6. Schritt: Interpretation

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{H}_0\text{: } \mu_A = \mu_B \\ \mathrm{H}_0\text{: } \mu_A \leqq \mu_B \\ \mathrm{H}_0\text{: } \mu_A \geqq \mu_B\end{array}\right\} \text{ wird nicht verworfen, wenn } \bar{x}_A \text{ im}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{zweiseitig} \\ \text{einseitig nach oben} \\ \text{einseitig nach unten}\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{abgeschlossenen } (1-\alpha)\text{-Zufalls-} \\ \text{streubereich für } \bar{x}_B \text{ liegt.}\end{array}$$



Für H_0: $\mu_A = \mu_B$ bedeutet dies:

Der Unterschied zwischen den beiden Mittelwerten ist nicht signifikant, d. h. statistisch nicht nachweisbar ...[1]

Wenn $\bar{x}_A$ nicht im $(1-\alpha)$-Zufallsstreubereich $\bar{x}_B$ *liegt:*
H_0 wird verworfen.
Der Unterschied zwischen den beiden Mittelwerten ist signifikant, d. h. statistisch nachweisbar ...[2]

Indirekter Schluß

4. Schritt: Bestimmung des Vertrauensbereichs für μ_A

Wir bestimmen den zweiseitig oder einseitig abgegrenzten Vertrauensbereich für μ_A bei bekannter Standardabweichung σ_A (siehe Abschnitt 2.6).

5. Schritt: Vergleich von μ_B mit dem Vertrauensbereich für μ_A

6. Schritt: Interpretation

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{H}_0\text{: } \mu_A = \mu_B \\ \mathrm{H}_0\text{: } \mu_A \leqq \mu_B \\ \mathrm{H}_0\text{: } \mu_A \geqq \mu_B\end{array}\right\} \text{ wird nicht verworfen, wenn } \mu_B \text{ im}$$

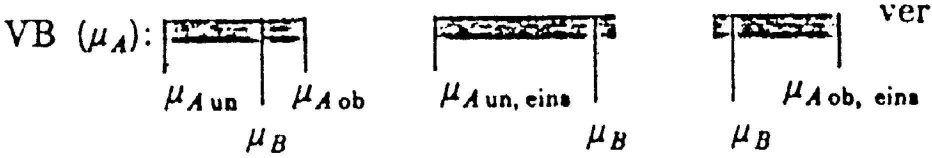
$$\left.\begin{array}{l}\text{zweiseitig} \\ \text{einseitig nach unten} \\ \text{einseitig nach oben}\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{abgegrenzten } (1-\alpha)\text{-Vertrauens-} \\ \text{bereich für } \mu_A \text{ liegt.}\end{array}$$

---

[1] exakt: Es ist nicht möglich, mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens α zu sagen, daß ein Unterschied zwischen den beiden Mittelwerten μ_A und μ_B besteht.

[2] exakt: Mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens α können wir sagen, daß ein Unterschied zwischen den beiden Mittelwerten μ_A und μ_B besteht.

H_0: $\mu_A = \mu_B$ $\mu_A \leqq \mu_B$ $\mu_A \geqq \mu_B$ wird nicht verworfen



Für H_0: $\mu_A = \mu_B$ bedeutet dies:

Der Unterschied zwischen den beiden Mittelwerten ist nicht signifikant, d. h. statistisch nicht nachweisbar.

Wenn μ_B nicht im Vertrauensbereich für μ_A liegt: H_0 wird verworfen.

Der Unterschied zwischen den beiden Mittelwerten ist signifikant, d. h. statistisch nachweisbar.

BEISPIELE

1. Bisher betrug die mittlere Reißfestigkeit einer bestimmten Type von Drähten 248 N/mm^2.
Nach verschiedenen Verbesserungsmaßnahmen wurden aus der Fertigung 50 Drähte geprüft. Dabei ergab sich eine mittlere Reißfestigkeit von 248,8 N/mm^2.
Haben die Verbesserungsmaßnahmen zu einer größeren Reißfestigkeit geführt? ($\alpha = 5\%$)
Man nimmt an, daß die Standardabweichung durch die Maßnahmen unverändert ist und nach wie vor etwa 2 N/mm^2 beträgt.

Lösung:

Grundgesamtheit *A:* $\sigma_A = 2$ N/mm^2

daraus Stichprobe mit $n_A = 50$ Meßwerte mit dem Mittelwert $\bar{x}_A = 248{,}8$ N/mm^2.

Grundgesamtheit *B:* $\mu_B = 248$ N/mm^2

1. Schritt: Die Fragestellung ist einseitig.

2. Schritt: Die Nullhypothese lautet: H_0: $\mu_A \leqq \mu_B$

Beachten Sie:

Wir vermuten, daß $\mu_A > \mu_B$ ist.

Um dies zu beweisen, nehmen wir vorerst das Gegenteil, also $\mu_A \leqq \mu_B$ an, und zeigen, daß diese Annahme zu einem Widerspruch führt.

Wir arbeiten also mit der Hypothese H_0: $\mu_A \leqq \mu_B$.

Wenn nun H_0 verworfen wird, dann ist statistisch nachgewiesen, daß $\mu_A > \mu_B$ gilt.

3. Schritt: $\alpha = 5\%$

a) Lösung mit direktem Schluß

4. Schritt: Wir bestimmen den einseitig nach oben abgegrenzten Zufallsstreubereich für Mittelwerte $\bar{x}_B$ von Stichproben des Umfanges $n_A = 50$:

$$\bar{x}_B \leqq \bar{x}_{\text{ob}} \text{ mit } \bar{x}_{\text{ob}} = \mu_B + u_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma_A}{\sqrt{n_A}}$$

Aus der Tabelle FZT42 lesen wir ab: $u_{1-\alpha} = u_{0{,}95} = 1{,}645$

Wir erhalten: $\bar{x}_{\text{ob}} = 248 + 1{,}645 \cdot \frac{2}{\sqrt{50}} = 248{,}47$

Der 95%-Zufallsstreubereich für $\bar{x}_B$ lautet:
$\bar{x}_B \leqq 248{,}47 \text{ N/mm}^2$

5. Schritt: $\bar{x}_A = 248{,}8 \text{ N/mm}^2$ liegt nicht im einseitig nach oben abgegrenzten 95%-Zufallsstreubereich für $\bar{x}_B$.

6. Schritt: Interpretation:

Die Nullhypothese H_0: $\mu_A \leqq \mu_B$ wird verworfen.

Die Vergrößerung der mittleren Reißfestigkeit ist statistisch nachgewiesen, d. h. signifikant.

Wir können davon ausgehen, daß die Verbesserungsmaßnahmen zielführend waren. ...[1]

b) Lösung mit indirektem Schluß

4. Schritt: Wir bestimmen den einseitig nach unten begrenzten Vertrauensbereich für μ_A, wobei σ_A bekannt ist.

$$\mu_A \geqq \mu_{\text{un}} \text{ mit } \mu_{\text{un}} = \bar{x}_A - u_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma_A}{\sqrt{n_A}}$$

Aus FZT42 lesen wir ab: $u_{1-\alpha} = u_{0{,}95} = 1{,}645$

Wir erhalten: $\mu_{\text{un}} = 248{,}8 - 1{,}645 \cdot \frac{2}{\sqrt{50}} = 248{,}33$

Der einseitig nach unten abgegrenzte 95%-Vertrauensbereich für μ_A lautet: $\mu_A \geqq 248{,}33 \text{ N/mm}^2$

5. Schritt: $\mu_B = 248 \text{ N/mm}^2$ liegt nicht im 95%-Vertrauensbereich.

6. Schritt: Interpretation: siehe oben.

---

[1] *Exakt:* Mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5% können wir sagen, daß die momentane mittlere Reißfestigkeit größer ist als die bisherige. Tatsächlich beträgt die Wahrscheinlichkeit, daß ein Mittelwert von mindestens 248,8 N/mm² auftritt, 0,23%.
Die Irrtumswahrscheinlichkeit ist daher sogar kleiner/gleich 0,23%.

2. Die Standardabweichung einer Abfüllanlage ist nahezu unabhängig von der eingestellten Abfüllmenge und beträgt 0,2 g.
Mit Hilfe einer Stichprobe von 20 Packungen soll geprüft werden, ob die Anlage auf einen Mittelwert von 500 g eingestellt ist.
Bei der Stichprobe ergaben sich folgende Meßwerte:

499.62 499,75 500,42 499,70 499.68 500,30 500,17 499,63 500.01 499,74
499,80 499,73 500,02 499,54 499,99 499,95 499,72 499,68 499,63 500,08

Ist die Maschine richtig eingestellt?

Lösung:

Grundgesamtheit A: $\sigma_A = \quad 0{,}2\,\mathrm{g}$

daraus Stichprobe mit $n_A = 20$ und $\bar{x}_A = 499{,}86\,\mathrm{g}$

Grundgesamtheit B: $\mu_B = 500\,\mathrm{g}$

1. Schritt: Die Fragestellung ist zweiseitig.

2. Schritt: Die Nullhypothese lautet: **H₀**: $\mu_A = \mu_B$

3. Schritt: Wir wählen $\alpha = 5\%$, 1% und $0{,}1\%$

a) Lösung mit direktem Schluß

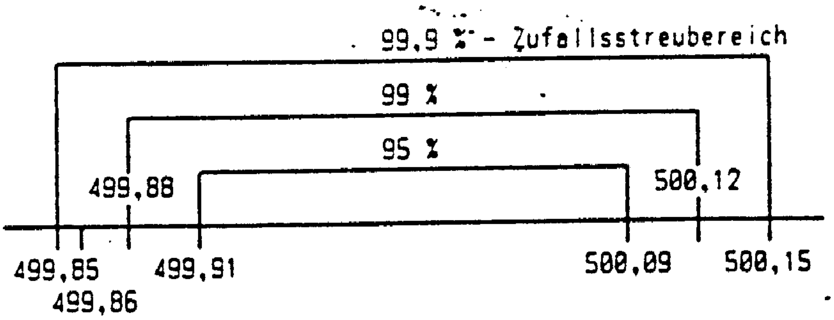
4. Schritt: Wir bestimmen den zweiseitig abgegrenzten $(1-\alpha)$-Zufallsstreubereich für Mittelwerte $\bar{x}_B$ von Stichproben des Umfanges $n_A = 20$:

$$\bar{x}_{\text{un}} \leqq \bar{x}_B \leqq \bar{x}_{\text{ob}} \quad \text{mit} \quad \bar{x}^{\text{ob}}_{\text{un}} = \mu_B \pm u_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_A}{\sqrt{n_A}}$$

$u_{1-\alpha/2}$ entnehmen wir der Tabelle FZT42.

$1-\alpha$	$u_{1-\alpha/2}$	x_{un}	x_{ob}	
95%	1,96	499,91	500,09	$x_A = 499{,}86$
99%	2,58	499,88	500,12	
99,9%	3,29	499,85	500,15	

5. Schritt: $\bar{x}_A = 499{,}86$ liegt nur im 99,9%-Zufallsstreubereich für $\bar{x}_B$.



6. Schritt: Interpretation:

Die Nullhypothese H_0: $\mu_A = \mu_B$ wird bei $\alpha = 5\%$ verworfen.

Eine Abweichung vom Sollwert ist signifikant, d. h. statistisch nachgewiesen. ...[1]

Die Maschine ist – sehr wahrscheinlich – nicht richtig eingestellt.

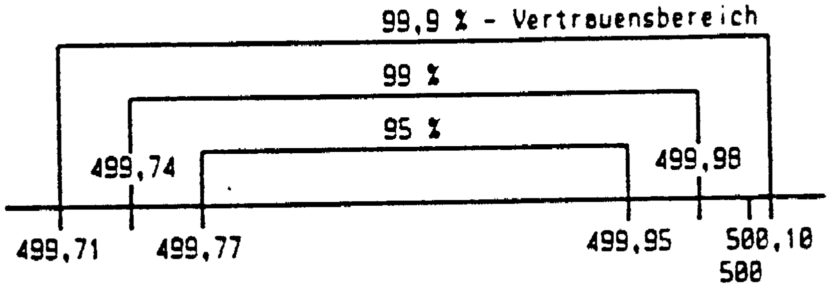
b) Lösung mit indirektem Schluß

4. Schritt: Wir bestimmen den zweiseitig abgegrenzten $(1-\alpha)$-Vertrauensbereich für μ_A, wobei σ_A bekannt ist:

$$\mu_{un} \leqq \mu_A \leqq \mu_{ob} \text{ mit } \mu_{un}^{ob} = \bar{x}_A \pm u_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_A}{\sqrt{n_A}}$$

$1-\alpha$	$u_{1-\alpha/2}$	μ_{un}	μ_{ob}	
95%	1,96	499,77	499,95	
99%	2,58	499,74	499,98	$\mu_B = 500$
99,9%	3,29	499,71	500,01	

5. Schritt: $\mu_B = 500$ g liegt weder im 95%-VB noch im 99%-VB von μ_A. Es liegt lediglich im 99,9%-VB von μ_A.



6. Schritt: Interpretation:
siehe letzte Seite.

---

[1] *Exakt:* Mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit zwischen 0,1% und 1% können wir sagen, daß eine Abweichung der eingestellten mittleren Abfüllmenge vom Sollwert besteht.

Wegen meiner Erkrankung wurde der Vortrag von Herrn Dr. Julius Schärf gehalten.

Dieser Beitrag basiert auf früheren gemeinsamen Arbeiten von Herrn Dr. Schärf und mir und wurde bereits im Buch

Schärf, Mathematik 4, 4. Auflage 1989

im R. Oldenburg Verlag Wien veröffentlicht.